UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Comunicação e Expressão
Departamento de Comunicação
Núcleo de Produção de Jornalismo Ajudada por Computador

Curso de Pós-graduação em Lingüística
Disciplina: *Introdução à Lógica*

Aula 6 (20/09/96)

Lógica dos Predicados

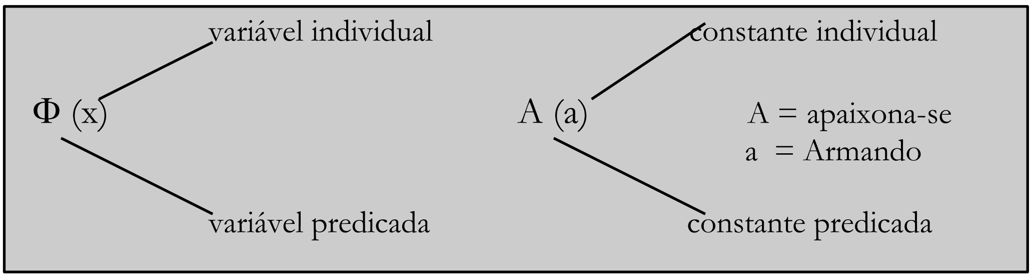
1. Conceito

A Lógica Proposicional trata das relações *entre proposições*. Cabe à Lógica dos Predicados dar conta das relações *no interior das proposições*. A proposição é descrita como estrutura que atribui ou predica propriedades a indivíduos.

A notação lida com *constantes individuais* (a, b, c, d...) e *variáveis individuais* (x, y, z...), que constituem os *termos individuais*; *constantes predicadas* (A, B, C, D) e *variáveis predicadas* (as letras ***f***, ***g***, ***h***; a letra grega Φ, eventualmente indiciada por 1 2 3...; Ψ, X...), que constituem os *termos predicados*.

1. termos individuais	1.1. variáveis individuais: x, y, z ... 1.2. constantes individuais: a, b, c ...
2. termos predicados	2.1. variáveis predicadas: ***f***, ***g***, ***h***... ; Φ, Ψ, X ... 3.1. constantes predicadas: A, B, C ...

A expressão Φ(x) ou ***f***(x) indica a possibilidade de predicar uma propriedade arbitrária a um indivíduo arbitrário. A notação entre parênteses é chamada de argumento. Φ(x) representa uma função, no sentido que o termo tem em matemática.



Há predicados de um argumento, correspondendo a verbos intransitivos (o argumento é o sujeito da oração); de dois argumentos, a verbos transitivos; de três argumentos, a verbos bitransitivos. Como a noção de predicação não é idêntica a de predicados gramaticais, pode-se admitir uma predicação quádrupla, em sentenças como "Mário comprou para Maria um relógio por vinte reais" (argumentos: "Mário", "Maria", "um relógio", "por vinte reais"). Uma proposição como "Xangô ergueu o machado" pode ser interpretada como predicação de dois argumentos, "Xangô" e "o machado", ou como predicação de um argumento, "Xangô", em que a função Φ seria "erguer o machado".

2. Quantificadores

O quantificador universal $\forall$ significa "tudo", "todo", "para todo" "qualquer", "para qualquer". Uma expressão como:

$\forall x \mid M(x) \rightarrow E(x)$, em que M= macaco e
E= esperto,

pode ser lida das seguintes maneiras:

(a) para qualquer x, acontece que, se x é macaco, então é esperto
(b) seja um x qualquer, se é macaco então é esperto
(c) se algo é macaco, então é esperto
(d) todo macaco é esperto.

O "todo" ou "qualquer" refere-se ao universo de discurso que, no caso de uma expressão matemática, pode ser o conjunto dos números; numa exposição sociológica, o conjunto dos seres humanos; e, numa sala de aula, o conjunto dos alunos.
Fórmulas lógicas que contêm variáveis livres, isto é, não quantificadas, são consideradas proposições abertas, sobre as quais não se pode formular valor de verdade. Admitamos que F significa “está em fluxo”: F(x) expressa uma relação (a função “está em fluxo”), mas não pode ser dita verdadeira ou falsa; “x está em fluxo” não é verdadeiro nem falso.
No entanto, $\forall x \mid F(x)$ já não é uma proposição aberta, porque pode ser atribuída a ela valor de verdade; x não é mais uma variável individual, porque está quantificada por $\forall$. A expressão significa o axioma de Heráclito, "tudo está em estado de fluxo. O *escopo* da quantificação é a expressão que vem depois da barra vertical.
O quantificador existencial, $\exists$, atesta a existência de alguma coisa. Corresponde aproximadamente a "algum", “pelo menos um”, "um", "o", "os". Por exemplo:

"alguns são conservadores"	$\exists x \mid C(x)$
"existe um unicórnio"	$\exists x \mid U(x)$
"uma garota é mais bonita do que Júlia"	$\exists x \mid G(x) \wedge B(x, j)$

A forma lógica dessas sentenças é, respectivamente,

"há pelo menos um x tal que é conservador"
"há pelo menos um x tal que é unicórnio"
"há pelo menos um x que é garota e é mais bonita do que Júlia".

Os quantificadores aparecem na ordem em que se enunciam. Assim:

$\forall x | \exists y |$ A(x, y) - "para qualquer x, existe pelo menos um y que x admira"
ou: "todos admiram alguém"
$\exists y | \forall x |$ A(x, y) - "existe pelo menos um y que, para qualquer x, x admira"
ou: "há pelo menos um admirado por todos"
O sentido das duas proposições acima é diverso. Na primeira, diz-se que cada indivíduo x tem um indivíduo y qualquer que admira; na segunda, que existe pelo menos um indivíduo y que é admirado por todos os x.

3. Sintaxe

As regras sintáticas seguintes especificam quais expressões são bem formadas na Lógica dos Predicados:

(a) Toda variável proposicional é uma expressão bem formada.
(b) Se t_1 é um termo individual (constante ou variável) e P um termo predicado de uma valência, então $P(t_1)$ é uma expressão bem formada.
(c) Se t_1 e t_2 são termos individuais e P um predicado de duas valências bem formado, então $P(t_1, t_2)$ é uma expressão bem formada.
(d) Se $t_1, t_2, \ldots t_n$ são termos individuais e P um predicado de valência n, então $P(t_1, t_2, \ldots t_n)$ é uma expressão bem formada.
(e) Se x é uma variável individual e a uma expressão bem formada em que x ocorre como variável livre, então $\forall x \ | a$ é uma expressão bem formada.
(f) Se x é uma variável individual e a uma expressão bem formada em que x ocorre como variável livre, então $\exists x \ | a$ é uma expressão bem formada.
(g) se a e b são expressões bem formadas, então -a , $a \wedge b$, $a \vee b$, $a \rightarrow b$, $a \equiv b$ são expressões bem formadas.
(h) Uma expressão bem formada que não contém variáveis livres é uma proposição.
(i) Só expressões conforme essas regras são bem formadas.

4. Semântica

A interpretação de uma língua relaciona a língua com um mundo possível, estabelecendo as extensões da língua, isto é, os objetos do mundo que são designados por expressões da língua; diz-se que ela modela uma proposição em um mundo possível. Eis as regras:

(a) as constantes individuais de uma língua são nomes de objetos do mundo possível nessa língua.
(b) os predicados de uma valência são interpretados como conjuntos de indivíduos do mundo possível a que o predicado se aplica.
(c) os predicados de duas valências são interpretados como conjunto de pares ordenados de indivíduos do mundo possível a que o predicado se aplica..
(d) os predicados de três valências são interpretados como triplos ordenados de indivíduos do mundo possível a que o predicado se aplica.
(e) os predicados de n valências são interpretados como n-tuplos ordenados de indivíduos do mundo possível a que o predicado se aplica.

(f) uma proposição na forma P (t) é verdadeira em uma interpretação arbitrária *I* no mundo possível M se e somente se o objeto designado pelo termo individual nesse mundo possível estiver entre os objetos designados pelo predicado.
(g) uma proposição na forma P (t_1,t_2) é verdadeira em uma interpretação arbitrária *I* no mundo possível M se e somente se o par ordenado de objetos designados pelo termo individual no mundo possível estiver entre os objetos designados pelo predicado.
(h) uma proposição na forma $\forall x \mid P(x)$ é verdadeira em uma interpretação arbitrária *I* no mundo possível M se e somente se todos os objetos de M são designados pelo predicado.
(i) uma proposição na forma $\exists x \mid P(x)$ é verdadeira em uma interpretação arbitrária *I* no mundo possível M se e somente se ao menos um objeto de M é designado pelo predicado.

5. <u>Formalização semântica</u>

Tomemos o conjunto D, de todos os indivíduos que ocorrem em todos os mundos possíveis. Com esses indivíduos podemos construir um número infinito de seqüências S, enumerando os indivíduos de D em pares, triplos, n-tuplos, podendo o mesmo indivíduo figurar mais de uma vez em cada enumeração.
Funções designam:

(a) o conjunto de indivíduos incluídos em cada interpretação, de modo que a interpretação I_n reporta-se a D_n indivíduos, em que D_n é um subconjunto de D, $D_n \subseteq D$;
(b) um indivíduo para cada constante individual em cada interpretação;
(c) uma extensão para cada constante predicado em cada interpretação;
(d) um conjunto infinito de seqüências para cada interpretação. As seqüências são associadas às valências das funções proposicionais (verbos intransitivos, transitivos, bitransitivos).

Temos, portanto, variáveis individuais x_1, x_2, ...(x_i)... xn, ordenadas em posições s_1, s_2, ... (s_i) ...s_n de uma seqüência arbitrária S. Podemos, então, dizer que uma proposição $\Phi(x_i)$ é verdadeira se o indivíduo x_i, na posição s_1, satisfaz à condição Φ. Em suma, A(x_1, x_2), em que A= "admira" é verdadeiro se o indivíduo na posição s_1 admira o indivíduo na posição s_2.

6. <u>Propriedades formais das relações</u>

Pares são seqüências ordenadas que guardam entre si relações, obedecendo aos seguintes parâmetros:

a. Reflexividade

Sendo uma relação R, se qualquer indivíduo está em relação R consigo mesmo a relação é dita *reflexiva*; se não, *irreflexiva*.

$\forall x \mid R(x, x)$ - reflexiva

$-\forall x \mid R(x, x)$ - irreflexiva

Exemplo de relação reflexiva: "idêntico"
Exemplo de relação irreflexiva: "mais alto que"

b. Simetria

Sendo uma relação R entre x e y, se ela ocorre de x para y e também de y para x, é dita *simétrica*; se não ocorre nunca, *assimétrica*.

$$\forall x \forall y \mid R(x, y) \rightarrow R(y, x) \text{ - simétrica}$$
$$\forall x \forall y \mid R(x, y) \rightarrow -R(y, x) \text{ - assimétrica}$$

Exemplo de relação simétrica: "tão grande quanto"
Exemplo de relação assimétrica: "pai de"

c. Transitividade

Sendo uma relação R entre x e y e entre y e z, se ela ocorre entre x e z é dita transitiva: se não, intransitiva.

$$\forall x \forall y \forall z \mid [R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow R(x, z) \text{ - transitiva}$$
$$\forall x \forall y \forall z \mid [R(x, y) \wedge R(y, z)] \rightarrow -R(x, z) \text{ - intransitiva}$$

Exemplo de relação transitiva: "à esquerda de"
Exemplo de relação intransitiva: "admira"

d. Reversão

Sendo uma relação R entre x e y e outra S entre y e x, uma será *reversa* da outra se a ocorrência da primeira implica a ocorrência da segunda. A relação reversa de S pode ser grafada Š.

$$\forall x \forall y \mid R(x, y) \rightarrow S(y, x)$$
$$\forall x \forall y \mid -[R(x, y) \rightarrow S(y, x)]$$

Exemplos de relação reversa: "dar - receber"
Exemplo de relação não-reversa: "mais alto - mais gordo"

e. *Quando ao domínio*

Quanto ao domínio, as relações podem ser:
Um-vários: "pai de" (a cada elemento do domínio corresponde mais de um elemento do co-domínio e a cada elemento do co-domínio corresponde não mais de um elemento do domínio);
Vários-um: "empregados *full time*" (a cada elemento do domínio corresponde não mais de um elemento no co-domínio e a cada elemento no co-domínio corresponde mais de um elemento no domínio);
Um-um (unívoca): a relação entre uma pessoa e seu CPF (a cada elemento no domínio corresponde um elemento no co-domínio e a cada elemento no co-domínio corresponde um elemento no domínio);

Vários-vários: leitores e livros de uma biblioteca (a cada elemento do domínio correspondem vários elementos do co-domínio e a cada elemento do co-domínio correspondem vários elementos do domínio).

Exercício:

Classifique as relações:

a) "ganhar tanto quanto"
b) "ganhar tanto ou mais que"
c) "ser avô de"
d) "apaixonar-se por"
e) "ser irmão de"