

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
Centro de Comunicação e Expressão
Departamento de Comunicação
Núcleo de Produção de Jornalismo Ajudada por Computador

Curso de Pós-graduação em Linguística
Disciplina: *Introdução à Lógica*

Aula 8 (11/10/96)
Lógica Modal

Podemos imaginar que o mundo em que vivemos é diferente por algum aspecto da maneira como se apresenta na realidade, e falar com consistência (sem contradições) sobre o que aconteceria se ele fosse de fato diferente. As maneiras com que podemos conceber o mundo, os *casos* ou *situações* que poderiam ocorrer, formam os chamados *mundos possíveis*. O conceito inicial de *mundo possível* deve-se a Leibnitz.

Para qualquer proposição - digamos, “o jantar está servido” - podemos imaginar um conjunto de mundos em que ela seria verdadeira. (No caso, a proposição *não* seria verdadeira caso estivéssemos numa manhã, ou numa cultura que desconhecesse o costume de fazer a refeição da noite.) O conjunto dos mundos possíveis em que uma proposição é verdadeira é o conjunto-verdade da proposição; indicar esses mundos é caracterizar a proposição.

Da mesma forma, um mundo possível pode ser caracterizado pelo conjunto das proposições que nele são verdadeiras. Posso falar de um mundo possível em que os bichos falam, as fadas existem e os rios têm água adocicada; essas proposições são características do mundo possível. Posso também classificar um grupo de proposições em verdadeiras e falsas conforme elas se comportem em determinado mundo possível; neste sentido, proposições são funções de mundos possíveis para valores-verdade.

	MP ₁	MP ₂	MP ₃	MP ₄	MP ₅	MP ₆	MP ₇
P ₁	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f
P ₂	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f
P ₃	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f	v/f

A Lógica Proposicional e a Lógica dos Predicados só podem falar de um mundo possível a cada vez. No entanto, é comum, na fala corrente, a exposição de relações entre diferentes mundos possíveis:

É possível que chova amanhã = em pelo menos um mundo possível, choverá amanhã.

É certo que choverá amanhã = em qualquer mundo possível, choverá amanhã *ou*: necessariamente, choverá amanhã.

“Possível” ou “necessário” (“certo”) são categorias estudadas na Lógica Modal. Na linguagem corrente, as nuances de sentido que são objeto da Lógica Modal traduzem-se por advérbios (“possivelmente”, “certamente” etc.) ou verbos não nucleares dos sintagmas verbais (“*pode* chover”, “*deve* chover” etc.). No sistema dos sintagmas verbais, a noção de

modo se combina com as noções de tempo e aspecto para estabelecer o elenco de possibilidades expressivas. Em Lógica, esses moduladores são representados por símbolos. Assim,

$\begin{aligned} \text{É possível que } p &= Mp, \Diamond p \\ \text{É necessário que } p &= Np, Lp, \Box p \end{aligned}$
--

Considerando-se o diferente rol de modalidades, há, na verdade, várias *lógicas modais*:

- a) A LÓGICA MODAL propriamente dita, que lida com o materialmente possível e o materialmente necessário;
- b) a LÓGICA DEÔNTICA, que lida com o obrigatório e o permitido;
- c) a LÓGICA ALÉTICA, que lida com o logicamente possível e o logicamente necessário;
- d) a LÓGICA EPISTÊMICA, que lida com o que se acredita e o que se conhece;
- e) a LÓGICA BULOMAICA, que lida com o que se deseja e o que certamente acontecerá..

O elenco dessa relação está longe de ser completado. A Lógica Modal lida com *verbos modais* - ou seja, verbos proposicionais (*clause verbs*) que expressam crenças, desejos, convicções etc. dos homens. O número, variedade e incidência dessas situações se amplia ao considerarmos que elas não coincidem com a forma expressa das sentenças, isto é, que a mesma construção frasal pode representar diferentes variantes modais, depreendidas do contexto. Se *A* diz que *ama B*, expressa uma convicção referida à subjetividade, isto é, uma proposição epistêmica do tipo *acredita*; se *A* diz que *Santiago é uma cidade*, uma proposição epistêmica do tipo *conhece*; se *A* diz que *pode casar-se*, expressa uma proposição epistêmica ambígua, modal ou deôntica; e assim por diante.

Operadores modais podem ser repetidos e combinados com conectivos proposicionais para formar proposições complexas, tais como “é possível que não-*p* seja necessário ou que *q* seja necessário:

$MN\text{-}p \vee Nq$

Operadores modais guardam entre si relações específicas, o que significa que os mundos possíveis guardam relações entre si:

- (a) $Mp \equiv \text{-}N\text{-}p$ “é possível que *p* se não é necessário (ou certo) que não-*p*”
- (b) $Np \equiv \text{-}M\text{-}p$ “é necessário (ou certo) que *p* se não é possível que não-*p*”

Em termos de quantificadores (universal e existencial), essas proposições podem ser rescritas:

- (a) *p* é verdadeiro em algum mundo possível se a negação de *p* não é verdadeira em todos os mundos possíveis;
- (b) *p* é verdadeiro em todos os mundos possíveis se a negação de *p* não é verdadeira em algum mundo possível.

1. Implicação estrita

O conceito de implicação estrita ($\Rightarrow$) é básico em Lógica Modal. Diz-se que *p* implica estritamente *q* se é logicamente necessário que, ao ocorrer *p*, ocorra *q*. Logo, $N(p \rightarrow q)$ se, em qualquer mundo possível, ao ocorrer *p*, ocorre *q*, não havendo mundo possível em que *p*

seja verdadeiro e q falso. Na implicação estrita, mais próxima da intuição dos falantes do que a implicação material, não é verdade que uma sentença falsa implique qualquer sentença. Assim:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrowtail q$
v	v	v	v
v	f	f	f
f	v	v	f
f	f	v	v

, em que $N(p \rightarrow q) \equiv (p \rightarrowtail q)$

Na implicação estrita,

$$(p \rightarrowtail q) \rightarrowtail (p \rightarrow q)$$

No entanto, não é verdade que uma sentença falsa implique estritamente qualquer sentença nem que uma sentença verdadeira seja implicada estritamente por qualquer sentença. Isto é, na implicação estrita, não é verdade a seguinte equivalência da implicação material:

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$$

A regra modus ponens tem equivalente na implicação estrita:

$a \rightarrowtail b$
 a
 $\therefore b$

2. Outras modalidades

A Lógica Modal propriamente dita, que utiliza os operadores M e N, lida com o materialmente possível e o materialmente necessário - equivalente, no limite da falibilidade humana, ao que se obtém incluindo junto a um infinitivo verbal as formas *pode* (“pode chover”) e *vai* (“vai chover”).

A Lógica Deôntica lida com dois outros operadores, P (permitido) e O (obrigatório), também interpretados como referentes a mundos possíveis. As relações entre esses operadores são semelhantes aos estudados na Lógica Modal propriamente dita. Assim:

$$\begin{aligned} P p &\equiv \neg O \neg p \quad \text{“é permitido que p se não é obrigatório que não-p”} \\ O p &\equiv \neg P \neg p \quad \text{“é obrigatório que p se não é permitido que não-p”} \end{aligned}$$

O paralelismo entre as duas variações modais tem seus limites. Por exemplo, se algo é necessário (certo), algo acontecerá; se algo acontece, é porque é possível acontecer. Assim:

$$\begin{aligned} N p &\rightarrow p \\ p &\rightarrow M p \end{aligned}$$

Pela própria natureza da relação deôntica, isso não se aplica, em nosso mundo, ao obrigatório e ao permitido. Nem sempre o que é obrigatório acontece e nem sempre acontece o que

é permitido. Então, em nosso mundo, as proposições seguintes são falsas - o que não impede que se conceba um mundo possível ideal em que seriam verdadeiras:

$$\begin{aligned}Op &\rightarrow p \\ p &\rightarrow Pp\end{aligned}$$

As relações estreitas entre as lógicas Modal e Deôntica estão expressas na linguagem corrente. Esta a raiz da ambigüidade de *pode* - “é permitido” ou “é materialmente possível” - *deve* - “é moralmente obrigatório” ou “é materialmente provável” - e *certo* - “é obrigatório” ou “é materialmente necessário”.

No sistema de Lógica Epistêmica concebido por Jaakko Hintikka, $B_a p$ significa “a acredita (*believe*) que p ” (“em todos mundos consistentes com as crenças de a , acontece p ”) e $K_a p$ “ a sabe (*know*) que p ”. Lida-se, aí, com atitudes proposicionais. Evidentemente, alguém pode acreditar em uma verdade lógica sem acreditar em outra - suponhamos, por não dispor de informações bastantes. Ora, todas as verdades lógicas (verdades em todos os mundos possíveis) são equivalentes, como verdades. Um dos pressupostos do sistema de Hintikka é que alguém, ao acreditar em p , acreditaria também nas conseqüências de p , o que é problemático.

Considerando que o mundo possível depende da capacidade mental de quem o concebe e admitindo que essa capacidade mental varia, somos forçados a aceitar que o que é conceptível (portanto, acessível) em nosso mundo pode não ser conceptível (ou acessível) em outro mundo, povoado por outras criaturas com grau distinto de inteligência (ou daquilo que chamamos de capacidade de concepção). Os mundos possíveis variam, assim, com o mundo real, aquele em que a proposição sobre os mundos possíveis é formulada. Chama-se a essa relação de *acessibilidade* ou *alternatividade*.

A acessibilidade pode ser analisada em termos de reflexividade, simetria e transitividade. Os mundos logicamente possíveis a que temos acesso incluem o nosso: nosso mundo é um mundo de acontecimentos logicamente possíveis. No entanto, nosso mundo não é um mundo onde as coisas obedeçam à condição de serem moralmente permissíveis. Quer dizer: nossa relação de acessibilidade com o mundo logicamente possível é reflexiva. Deve-se a isso a falsidade das proposições $Op \rightarrow p$ e $p \rightarrow Pp$.

3. De dicto e de re

Consideremos uma proposição da Lógica epistêmica:

João acredita que todos os campeões de corrida são negros.

Isso pode significar:

- (a) que João acredita que todos os campeões de corrida realmente existentes são negros;
- (b) que, para qualquer indivíduo que seja campeão de corrida, João acredita que ele é negro; em síntese, João acredita na afirmação de que todos os campeões de corrida são negros.

Sendo N “ser negro” e C “ser campeão de corrida”,

- (a) $B_a \mid \forall x \mid C(x) \rightarrow N(x)$
- (b) $\forall x \mid C(x) \rightarrow B_a [N(x)]$

No caso (a), a crença de João reporta-se à realidade e é dita *de re*: trata-se de uma constatação, que eventualmente estará errada se, por exemplo, João confundiu o tcheco Emil Zatopek com o queniano Isaac Kopeti. No caso (b), a crença de João se aplica ao enunciado “todos os campeões de corrida são negros”; é, portanto, uma crença *de dicto*.

Se João pensa que o homem que o roubou era caolho, ele pode referir-se ao homem que realmente o roubou (pode não ser caolho) ou ao homem que ele pensa que o roubou (pode não ter sido ele). No primeiro caso, uma constatação, talvez errada: no segundo, uma acusação, talvez infundada.

Para representar logicamente as duas operações, é preciso recorrer a novos operadores: o operador *iota* (ι) e o operador *lambda* (λ).

a - O operador *iota* individualiza um objeto como aquele que tem tal ou qual propriedade. Já não se trata de um objeto qualquer, mas de objeto determinado; associa-se à noção que, na língua corrente, é atribuída ao artigo definido singular. Assim,

$\iota x \mid F(x)$ difere de

$\forall x \mid F(x)$ e de

$\exists x \mid F(x)$ porque não se trata de “para qualquer x ” ou da “existência de um x capaz” de satisfazer à condição F , mas de “determinado x ” que atende a essa condição.

O operador *iota* (ι) transforma uma função proposicional (da qual não se pode afirmar verdade ou falsidade) num termo ou constante individual; não se poderá, ainda aí, afirmar verdade ou falsidade da proposição. Isso o distingue dos quantificadores ($\forall$, $\exists$) que transformam uma proposição aberta em proposição da qual se pode afirmar verdade ou falsidade.

b - O operador *lambda* (λ) é uma espécie de determinativo plural. Quando se escreve

$\lambda x \mid F(x)$, está-se dizendo “o conjunto dos x que satisfazem a condição F ”

Voltemos ao exemplo *João acredita que o homem que o roubou era caolho*. Representaremos “ x roubou João” como $U(x, j)$ e “era caolho” como $C(x)$, João acredita será B_j .

Na interpretação *de dicto*:

$B_j \mid \iota x \mid R(x, j) \wedge C(x)$

Para a interpretação *de re*, teremos que “o homem que roubou João é tal que ele acredita ser ele caolho”. Precisamos de uma referência ao “conjunto dos indivíduos tais que João crê serem eles caolhos”. Isso pode ser representado por:

$[\lambda x \mid B_j \mid C(x)] [\iota x \mid R(x, j)]$, “dado o conjunto dos indivíduos que João acredita serem caolhos, um indivíduo determinado desse conjunto roubou João”.